特殊相対性理論における時間の遅れ

まず、光を下端から発射し上端に届くまで t 秒かかる装置（以降、光時計と呼ぶ）を考える。

次に、この光時計をある速度で動く乗り物（分かりやすくするため、電車ということにする）に置いてみる。この電車内にいる人には、当然光時計が下端から上端に届くのに t 秒かかるように見える。

しかし、電車の外にいる人には電車が移動しているため光は斜めに進んでいるように見え、当然光の進む距離も長くなる。相対性理論では光の速度は唯一絶対（速度合成が適用されない）なので、光が斜めに進むのにかかる時間は t 秒より長い T 秒となる。言い換えれば、電車外では光時計が下端から上端に届くのに T 秒かかっているのに、電車内では t 秒しかかかっていないことになる。

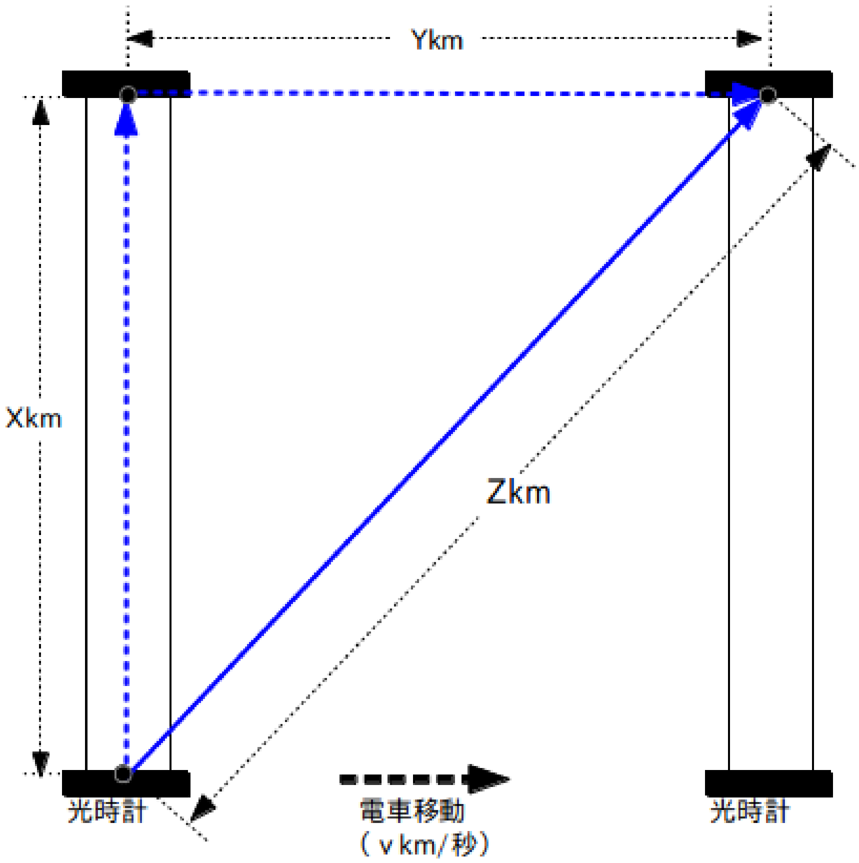

図 1　電車で移動する光時計

図１のように、光時計の下端から上端までの距離を Xkm、光が光時計の下端から上端に届く間に移動した電車の移動距離を Ykm、地上から見た光が斜めに移動した距離を Zkm、電車の速度を $v$km/秒、光の速度を $c$km/秒とする。電車内の人には Xkm 移動するのに t 秒、電車外の人には Zkm 移動するのに T 秒かかるように見えるので、距離の比（$X : Z$）は時間の比（$t : T$）に等しくなり、

$$\frac{X}{Z} = \frac{t}{T} \tag{1}$$

が成り立つ。一方、光が速度 $c$km/秒で Zkm 進む間に光時計そのものは速度 $v$km/秒で Ykm 移動する。距離の比（$Y : Z$）は速度の比（$v : c$）に等しくなるので、

$$\frac{Y}{Z} = \frac{v}{c} \tag{2}$$

が成り立つ。距離 X, Y, Z の間にはピタゴラスの定理が成り立つので、

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

両辺を Z^2 で割ると、

$$\left(\frac{X}{Z}\right)^2 + \left(\frac{Y}{Z}\right)^2 = 1$$

両辺から $(Y/Z)^2$ を引くと、

$$\left(\frac{X}{Z}\right)^2 = 1 - \left(\frac{Y}{Z}\right)^2$$

両辺の平方根をとると、

$$\frac{X}{Z} = \sqrt{1 - \left(\frac{Y}{Z}\right)^2} \tag{3}$$

(3) に (1), (2) を代入すると、

$$\frac{t}{T} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

両辺に T をかけると、

$$t = T\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{4}$$

この (4) が「**特殊相対性理論における時間の遅れ**」の計算式である。

【計算例】速の 90 % の速度の乗り物に乗って宇宙旅行に出かけ、１年後に地球に戻ってきたらどのくらい時間が遅れているかを計算してみる。

$$\begin{aligned}
t &= T\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \\
&= T\sqrt{1-\left(\frac{0.9c}{c}\right)^2} \\
&= T\sqrt{1-0.9^2} \\
&= T\sqrt{1-0.81} \\
&= T\sqrt{0.19} \\
&\simeq 0.4359T
\end{aligned}$$