Machin の公式

　マチン (Machin) の公式は、

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

である。変形すると、

$$\pi = 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

さらに、テイラー展開（グレゴリー展開）すると、

$$\begin{aligned}
\pi &= 16\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} - 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1} \\
&= \left(\frac{16}{5} - \frac{16}{3\cdot 5^3} + \frac{16}{5\cdot 5^5} - \frac{16}{7\cdot 5^7} + \cdots\right) \\
&\quad - \left(\frac{4}{239} - \frac{4}{3\cdot 239^3} + \frac{4}{5\cdot 239^5} - \frac{4}{7\cdot 239^7} + \cdots\right) \\
&= \left\{\left(\frac{16}{5} - \frac{4}{239}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}\right) + \cdots\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left(\frac{16}{5^{2k-1}} - \frac{4}{239^{2k-1}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

となる。（後の計算の都合上 k の初期値を 0 ではなく 1 としている）

　次に、l 桁の精度の π を求めるのに、変形後の Machin の公式の第何項まで計算（k の終端をいくらに）すればよいかという問題について。
$\frac{1}{5^{2k-1}} > \frac{1}{239^{2k-1}}$ であるので、

$$\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{1}{5^{2k-1}} < 10^{-l}$$

を満たす k が求まれば $k+1$ 項以降は計算しなくてもよい。まずは両方の常用対数を取る．(以下 $\log = \log_{10}$)

$$\log\left(\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{1}{5^{2k-1}}\right) < \log 10^{-l}$$

$$-\log(2k-1) + (2k-1)\log\left(\frac{1}{5}\right) < -l$$

ここで $O(\log k) < O(k)$ から $\log(2k-1)$ の項を無視して考えると、

$$\frac{l+\log 5}{2\log 5} < k$$

したがって、

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{\log 5} + 1\right)\right] + 1$$

で求まる桁まで計算すればよいことになる。([ ] はガウス記号で、中の値を超えない最大の整数)

これまでの方法だと、収束速度の速い項も収束速度の遅い項の計算項数と同じ項数分計算してしまい若干効率が悪い。 テイラー展開（グレゴリー展開）後にまとめない（各項を独立させて計算する）方法を考えてみる。

$$\begin{aligned}\pi &= 16\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} - 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\frac{16}{5^{2k-1}} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\frac{4}{239^{2k-1}}\end{aligned}$$

となる。（後の計算の都合上 k の初期値を 0 ではなく 1 としている）

この場合、第 1 項、第 2 項はそれぞれ、

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{\log 5}+1\right)\right]+1,\quad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{\log 239}+1\right)\right]+1$$

で求まる桁まで計算すればよいことになる。($\log = \log_{10}$ で、[ ] はガウス記号で、中の値を超えない最大の整数)