

Gaußの公式

Gauß の公式は、

$$\frac{\pi}{4} = 12 \tan^{-1} \frac{1}{18} + 8 \tan^{-1} \frac{1}{57} - 5 \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

である。変形すると、

$$\pi = 48 \tan^{-1} \frac{1}{18} + 32 \tan^{-1} \frac{1}{57} - 20 \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

さらに、テイラー展開（グレゴリー展開）すると、

$$\begin{aligned} \pi &= 48 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{18}\right)^{2k+1} + 32 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{57}\right)^{2k+1} - 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1} \\ &= \left(\frac{48}{18} - \frac{48}{3 \cdot 18^3} + \frac{48}{5 \cdot 18^5} - \frac{48}{7 \cdot 18^7} + \dots \right) \\ &\quad + \left(\frac{32}{57} - \frac{32}{3 \cdot 57^3} + \frac{32}{5 \cdot 57^5} - \frac{32}{7 \cdot 57^7} + \dots \right) \\ &\quad - \left(\frac{20}{239} - \frac{20}{3 \cdot 239^3} + \frac{20}{5 \cdot 239^5} - \frac{20}{7 \cdot 239^7} + \dots \right) \\ &= \left(\frac{48}{18} + \frac{32}{57} - \frac{20}{239} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{48}{18^3} + \frac{32}{57^3} - \frac{20}{239^3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{48}{18^5} + \frac{32}{57^5} - \frac{20}{239^5} \right) - \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{48}{18^{2k-1}} + \frac{32}{57^{2k-1}} - \frac{20}{239^{2k-1}} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。（後の計算の都合上 k の初期値を 0 ではなく 1 としている）

次に、 l 桁の精度の π を求めるのに、変形後の Gauß の公式の第何項まで計算（ k の終端をいくらに）すればよいかという問題について。

$\frac{1}{18^{2k-1}} > \frac{1}{57^{2k-1}} > \frac{1}{239^{2k-1}}$ であるので、

$$\frac{1}{2k-1} \cdot \frac{1}{18^{2k-1}} < 10^{-l}$$

を満たす k が求まれば $k+1$ 項以降は計算しなくてもよい。まずは両方の常用対数を取る。

（以下 $\log = \log_{10}$ ）

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{2k-1} \cdot \frac{1}{18^{2k-1}} \right) &< \log 10^{-l} \\ -\log(2k-1) + (2k-1) \log \left(\frac{1}{18} \right) &< -l \end{aligned}$$

ここで $O(\log k) < O(k)$ から $\log(2k-1)$ の項を無視して考えると、

$$\frac{l + \log 18}{2 \log 18} < k$$

したがって、

$$\left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{l}{\log 18} + 1 \right) \right\rceil + 1$$

で求まる桁まで計算すればよいことになる。（ $\lceil \quad \rceil$ はガウス記号で、中の値を超えない最大の整数）