1　Chudnovsky（チャドノフスキー）の公式

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{\sqrt{C^3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(A+Bn)}{(3n)!(n!)^3 C^{3n}} \tag{1}$$

（但し、$A = 13591409$,　$B = 545140134$,　$C = 640320$）

2　Binary Splittling Algorithm(BSA 法)

級数展開の計算量（計算時間）削減のために使用する Binary Splittling Algorithm（BSA 法）について簡単に理解しておく。（但し、ここでは Chudnovsky の公式を使用することに特化している）

まず、次のように定義される級数 S を考える。（n_1, n_2 は正の整数）

$$S(n_1, n_2) = \sum_{n=n_1+1}^{n_2} \left(a_n \prod_{k=n_1+1}^{n} \frac{p_k}{q_k} \right) \tag{2}$$

また、級数 P, Q, T を次のように定義する。（n_1, n_2 は正の整数）

$$P(n_1, n_2) = \prod_{k=n_1+1}^{n_2} p_k \tag{3}$$

$$Q(n_1, n_2) = \prod_{k=n_1+1}^{n_2} q_k \tag{4}$$

$$T(n_1, n_2) = S(n_1, n_2) Q(n_1, n_2) \tag{5}$$

すると、級数 P, Q, T は次のように再帰的に評価される。（m は $n_1 < m < n_2$ を満たす正の整数）

$$P(n_1, n_2) = P(n_1, m) P(m, n_2)$$
$$Q(n_1, n_2) = Q(n_1, m) Q(m, n_2)$$
$$T(n_1, n_2) = T(n_1, m) Q(m, n_2) + P(n_1, m) T(m, n_2)$$

アルゴリズムとしては次のようになる。（擬似的な記法）

Func $compPQT(n_1, n_2)$

・$n_1 + 1 = n_2$ の場合

return $(p_{n_2}, q_{n_2}, a_{n_2} p_{n_2})$

・上記以外の場合

$m \leftarrow \lfloor (n_1 + n_2)/2 \rfloor$

$(P_1, Q_1, T_1) \leftarrow compPQT(n_1, m)$

$(P_2, Q_2, T_2) \leftarrow compPQT(m, n_2)$

$return(P_1 P_2, Q_1 Q_2, T_1 Q_2 + P_1 T_2)$

End func

3 円周率計算

公式 (1) を変形していくが、まず (1) の $(6n)!/(3n)!$ の部分を変形する。

$$\begin{aligned}
\frac{(6n)!}{(3n)!} &= \frac{\prod_{k=1}^{6n} k}{\prod_{k=1}^{3n} k} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} 6k(6k-1)(6k-2)(6k-3)(6k-4)(6k-5)}{\prod_{k=1}^{n} 3k(3k-1)(3k-2)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} 24(6k-1)(2k-1)(6k-5) \\
&= 24^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)(6k-1)(6k-5)
\end{aligned}$$

ここで、

$$a_k = (-1)^k (A + Bk) \tag{6}$$
$$p_k = (2k-1)(6k-1)(6k-5) \tag{7}$$
$$q_k = k^3 C^3 / 24 \tag{8}$$

とおくと、公式 (1) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} &= \frac{12}{\sqrt{C^3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \prod_{k=1}^{n} p_k}{\prod_{k=1}^{n} q_k} \\
&= \frac{12}{C\sqrt{C}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n} p_k}{\prod_{k=1}^{n} q_k} \\
&= \frac{12}{C\sqrt{C}} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k}{q_k} \right) \\
&= \frac{12}{C\sqrt{C}} \left(A + \lim_{N \to \infty} (S(0,N)) \right) \\
\pi &\simeq \frac{C\sqrt{C}}{12} \cdot \frac{1}{A + S(0,N)} \quad (N \text{ は正の整数})
\end{aligned}$$

ここで、(5) が

$$\begin{aligned}
T(n_1,n_2) &= S(n_1,n_2) Q(n_1,n_2) \\
&= \left\{ \sum_{n=n_1+1}^{n_2} \left(a_n \prod_{k=n_1+1}^{n} \frac{p_k}{q_k} \right) \right\} \left(\prod_{k=n_1+1}^{n_2} q_k \right) \\
&= \sum_{n=n_1+1}^{n_2} \left(a_n \prod_{k=n_1+1}^{n} p_k \prod_{k=n+1}^{n_2} q_k \right)
\end{aligned}$$

となることから、

$$\begin{aligned}
\pi &\simeq \frac{C\sqrt{C}}{12} \cdot \frac{Q(0,N)}{AQ(0,N) + T(0,N)} \\
&= \frac{640230\sqrt{640320}}{12} \cdot \frac{Q(0,N)}{AQ(0,N) + T(0,N)} \\
&= 426880\sqrt{10005} \cdot \frac{Q(0,N)}{AQ(0,N) + T(0,N)} \quad (N \text{ は正の整数})
\end{aligned} \tag{9}$$

あとは、N を適当に設定して Binary Splitting Algorithm で再帰的に P, Q, T を計算し、最後に式 (9) に代入すればよい。

但し、実際に計算機で計算する場合は、乗算で FFT（高速フーリエ変換)、除算・平方根でニュートン法を使用したり、高速演算用のライブラリを使用したりするなどして高速化を図る。