

# 1 BBP の公式

BBP(David Bailey, Peter Borwein, Simon Plouffe) の公式は 16 進数 (2 進数) 表記での  $n$  桁数を計算量  $O(n)$  で求められる方式。

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left( \frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \quad (1)$$

## 2 円周率計算

まず、

$$S_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+j)} \quad (2)$$

とおく。 $x$  の小数部分を  $\{x\}$  と表すとすると、円周率の小数点以下  $d+1$  桁目は、 $\{16^d\pi\}$  を求めればよいことが分かる。

(1) を変形して (2) を代入する。

$$\begin{aligned} \pi &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+1)} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+4)} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+5)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+6)} \\ &= 4S_1 - 2S_4 - S_5 - S_6 \end{aligned}$$

これから、小数点以下  $d+1$  桁目  $\{16^d\pi\}$  は次のようになる。

$$\{16^d\pi\} = \{4\{16^dS_1\} - 2\{16^dS_4\} - \{16^dS_5\} - \{16^dS_6\}\} \quad (3)$$

また、式 (2) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \{16^dS_j\} &= \left\{ \left\{ \sum_{k=0}^d \frac{16^{d-k}}{8k+j} \right\} + \sum_{k=d+1}^{\infty} \frac{16^{d-k}}{8k+j} \right\} \\ &= \left\{ \left\{ \sum_{k=0}^d \frac{16^{d-k} \bmod (8k+j)}{8k+j} \right\} + \sum_{k=d+1}^{\infty} \frac{16^{d-k}}{8k+j} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

この (4) を使用して  $\{16^dS_1\}, \{16^dS_4\}, \{16^dS_5\}, \{16^dS_6\}$  を計算後、(3) に代入すれば、円周率の小数点以下  $d+1$  桁目が計算できる。