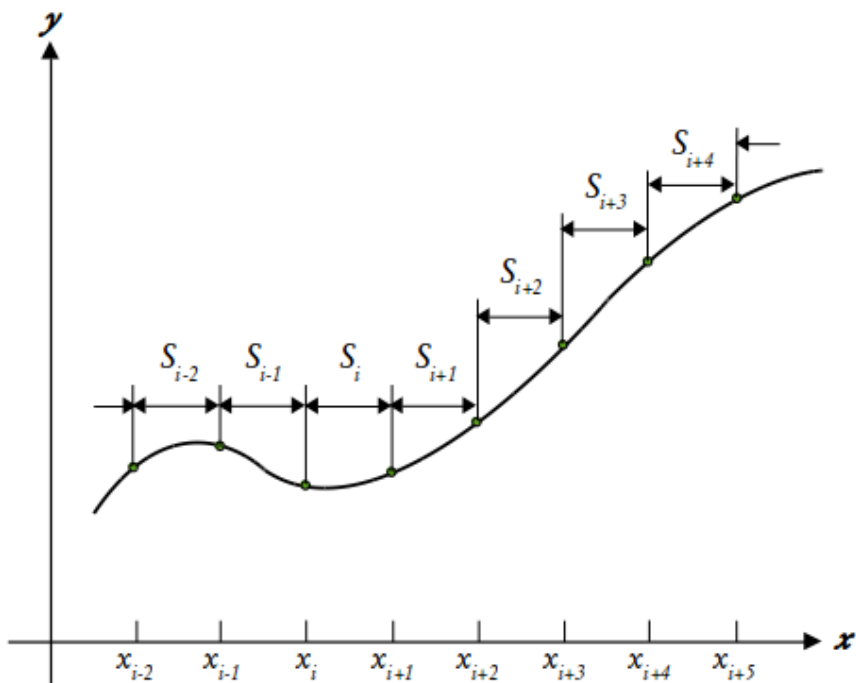


# 3次スプライン補間

補間する領域をデータ間隔  $[x_i, x_{i+1}]$  に区切り、その近傍の値を使い低次の多項式で近似することを考える際、それぞれの境界で導関数が連続になるように近似する方法がスプライン補間 (spline interpolation) であり、各区間での補間に使用する関数が3次関数であるため、「3次スプライン補間」と呼ばれている。(当然、2次も存在する)

与えられた  $N + 1$  個のデータ点を  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ 、区間  $[x_i, x_{i+1}]$  で補間に使用する関数を  $S_i(x)$  とすると、図は次のようになる。

【スプライン補間の区分】



# 1 区分多項式

区間  $[x_i, x_{i+1}]$  で補間に使う区分多項式  $S_i(x)$  は、次のように表せる。

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N - 1) \quad (1)$$

そして、全体の関数の形にもっとも影響を少なくするために、両端  $x = x_0, x_N$  での二次導関数の値を 0、すなわち、

$$S_0''(x_0) = S_{N-1}''(x_N) = 0 \quad (2)$$

として考える。これは自然スプラインと呼ばれる。また、 $x = x_i$  における二次導関数の値を  $v_i$  で表現することにする。

$$v_i = S_j''(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad j = i - 1, i) \quad (3)$$

さらに、以下の条件を考慮して連立方程式を生成し解くことで  $a_i, b_i, c_i, d_i$  を求める。

1. 全てのデータ点に対して各区分多項式  $S_i(x)$  の両端で値が決まるため、 $2N$  個の方程式ができる。
2. 各境界点の一次導関数は連続であること。これにより  $N - 1$  個の方程式ができる。
3. 各境界点の二次導関数は連続であること。これにより  $N - 1$  個の方程式ができる。

## 2 $b_i$ の表現

式 (1) の二次導関数を求めると、

$$S_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N - 1)$$

$x = x_i$  のとき、式 (3) の  $v_i = S_i''(x_i)$  を代入すると  $b_i$  は次のようになる。

$$b_i = \frac{v_i}{2} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N - 1) \quad (4)$$

## 3 $a_i$ の表現

各境界点の二次導関数が連続であるという条件、すなわち  $v_{i+1} = S_i''(x_{i+1})$  から、

$$v_{i+1} = S_i''(x_{i+1}) = 6a_i(x_{i+1} - x_i) + 2b_j \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N - 1)$$

これから  $a_i$  は次のようなる。

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{v_{i+1} - 2b_i}{6(x_{i+1} - x_i)} \\ &= \frac{v_{i+1} - v_i}{6(x_{i+1} - x_i)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N - 1) \end{aligned} \quad (5)$$

## 4 $d_i$ の表現

当然ながら、全てのデータ点はそれぞれの区分多項式上にある。区分多項式の左端  $x_i$  を考えると  $S_i(x_i) = y_i$  である。式 (1) に代入すると  $d_i$  は次のようになる。

$$d_i = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (6)$$

## 5 $c_i$ の表現

$d_i$  と同様  $c_i$  も全てのデータ点がそれぞれの区分多項式上にあることから求められるが、今度は右端  $x_{i+1}$  で考える。  $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$  なので、式 (1) に代入すると、次のようになる。

$$a_i(x_{i+1} - x_i)^3 + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 + c_i(x_{i+1} - x_i) + d_i = y_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

これに式 (4), (5), (6) を代入すると  $c_i$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \left\{ y_{i+1} - a_i(x_{i+1} - x_i)^3 - b_i(x_{i+1} - x_i)^2 - d_i \right\} \\ &= \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \left\{ y_{i+1} - \frac{v_{i+1} - v_i}{6(x_{i+1} - x_i)} (x_{i+1} - x_i)^3 - \frac{v_i}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 - y_i \right\} \\ &= \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{1}{6} (x_{i+1} - x_i)(2v_i + v_{i+1}) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (7)$$

以上で、 $a_i, b_i, c_i, d_i$  が  $x_i, y_i, v_i$  で表現できたことになる。

## 6 連立方程式

各境界点の一次導関数が連続であるという条件から、

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-2)$$

すなわち、式 (1) から、

$$3a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + 2b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i = c_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-2) \quad (8)$$

となる。この式 (8) に式 (4), (5), (7) を代入して  $x_i, y_i, v_i$  で表し、 $v_i$  の連立方程式にする。途中の計算は省略するが、最終的に次のようになる。

$$(x_{i+1} - x_i)v_i + 2(x_{i+2} - x_i)v_{i+1} + (x_{i+2} - x_{i+1})v_{i+2} = 6 \left( \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-2) \quad (9)$$

式 (2), (3) から  $v_0 = v_N = 0$  であるので、式 (9) の連立一次方程式は次のような行列で表せる。

$$\begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & h_{i-1} & 2(h_{i-1} + h_i) & h_j \\ & & & & & \ddots \\ & & & & h_{N-2} & 2(h_{N-2} + h_{N-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

ただし、  $h_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-1)$

$$w_i = 6 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N-1)$$

この連立一次方程式 (10) を解いて各データ点での二次導関数の値  $v_i$  を求めた後、 $v_i$  を式 (5), (4), (7), (6) に代入して  $a_i, b_i, c_i, d_i$  を求める。

区分多項式が求まるので、区分ごとに補間値も計算できることになる。