連立方程式の解法　ガウスの消去法

ガウスの消去法は、大きな方程式系を系統的な方法で小さな系へ分解するという考え方に基づいており、基本的に前進消去と後退代入という 2 つの操作で成り立っている。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \tag{2}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \tag{3}$$

$(2) - (1) \times \frac{a_{21}}{a_{11}},\ (3) - (1) \times \frac{a_{31}}{a_{11}}$ を行うと (2) と (3) の x_1 項が消える。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{1'}$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \tag{2'}$$
$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \tag{3'}$$

$(3') - (2') \times \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ を行うと $(3')$ の x_2 項が消える。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{1''}$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \tag{2''}$$
$$+a''_{33}x_3 = b''_3 \tag{3''}$$

ここまでの操作を**前進消去**という。

次に、$(3'')$ より x_3 が求まるので、この値を $(2'')$ に代入して x_2 を求め、さらに x_2, x_3 を $(1'')$ に代入して x_1 を求める。この方法を**後退代入**という。

実際のアルゴリズムは以下のようになる。

【前進消去】

1. ピボットを 1 行 1 列から $n-1$ 行 $n-1$ 列に移しながら以下の操作を繰り返す。
   (a) a_{kk} をピボットにし、i 行について $\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ を求め、i 行 $-$ k 行 $\times$ $\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ を行う。

$$
\begin{array}{ccccccc}
(k) & \rightarrow & (j) & & & & \\
\downarrow & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
(i) & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \searrow & \vdots & \vdots \\
 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n
\end{array}
$$

【後退代入】

1. b'_n から b'_1 に向かって以下の操作を繰り返す。
   (a) b'_i を初期値とし、b'_{i+1} から b'_n まで $a'_{ij} \times b'_j$ の値を減算する。
   (b) (a) で求められた値を a'_{ii} で除算する。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \rightarrow & (j) & & & & \\
\downarrow & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
 & 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\
(i) & 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n
\end{array}
$$