1 フーリエ変換とは

フーリエ変換 とは、複素関数 (または実関数) から別の複素関数への変換のことで、時間領域から周波数領域への変換である。また逆の変換を **フーリエ逆変換** という。

2 フーリエ変換の導出

複素フーリエ級数展開の定義からフーリエ変換を導出する。（以下、i : 虚数単位）

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega_0 t) \quad \left(\text{ただし、}\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \exp(-in\omega_0 \tau) d\tau \right) \exp(in\omega_0 t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \exp(-i\frac{2n\pi}{T}\tau) d\tau \right) \exp(in\frac{2n\pi}{T}t) \end{aligned}$$

ここで、$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_n = \frac{2n\pi}{T} = n\Delta\omega$ とおくと、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \exp(i\omega_n(t-\tau)) d\tau$$

$T \to \infty(\omega_0 \to 0)$ とすると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(i\omega(t-\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right) \exp(i\omega t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right) \exp(i\omega t) d\omega \end{aligned}$$

ここで、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \tag{2.1}$$

とおくと、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \tag{2.2}$$

となる。(2.1) を **フーリエ変換**、(2.2) を **フーリエ逆変換** と呼ぶ。

次に、オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \tag{2.3}$$

を使って (2.1), (2.2) を書き換えてみる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\omega t - i\sin\omega t)dt \tag{2.4}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(\cos\omega t + i\sin\omega t)d\omega \tag{2.5}$$

となる。そして、関数 $f(t)$ が偶関数なら、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\ dt \tag{2.6}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cos\omega t\ d\omega \tag{2.7}$$

と表され、(2.6) を **フーリエ余弦変換**、(2.7) を **フーリエ余弦逆変換** と呼ぶ。また、関数 $f(t)$ が奇関数なら、

$$F(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\ dt \tag{2.8}$$

$$f(t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\sin\omega t\ d\omega \tag{2.9}$$

と表される。ここで、$\dfrac{F(\omega)}{-i} = iF(\omega) \rightarrow\ F(\omega)$ と変数変換すると、虚数単位 $i, -i$ は除外することができ、

$$F(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\ dt \tag{2.10}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\sin\omega t\ d\omega \tag{2.11}$$

となる。(2.10) を **フーリエ正弦変換**、(2.11) を **フーリエ正弦逆変換** と呼ぶ。

3　離散フーリエ変換とは

今まで連続の値について考えてきたが、当然コンピュータでは連続の値は扱えない。そのため、プログラムで実装するには、離散の概念を用いた **離散フーリエ変換、逆離散フーリエ変換** を使用する。

4　離散フーリエ変換の導出

1周期を N 分割したサンプル点（複素数列）$x(0), x(1), \cdots, x(N-1)$ に対して、得られる N 個のサンプル値（複素数列）を $X(0), X(1), \cdots, X(N-1)$ とすると、

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-i\frac{2\pi}{N}kn) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \tag{4.1}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(i\frac{2\pi}{N}kn) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \tag{4.2}$$

が得られ、(4.1) を **離散フーリエ変換**、(4.2) を **逆離散フーリエ変換** と呼ぶ。また、(4.1), (4.2) にオイラーの公式 (2.3) を適用すると、

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)(\cos\frac{2\pi}{N}kn - i\sin\frac{2\pi}{N}kn) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \tag{4.3}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)(\cos\frac{2\pi}{N}kn + i\sin\frac{2\pi}{N}kn) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \tag{4.4}$$

となる。さらに、$x(n), X(k)$ は複素数であるので、$x(n)$ の実部・虚部を $x_r(n), x_i(n)$、$X(k)$ の実部・虚部を $X_r(k), X_i(k)$ とすると、次のようになる。

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1}\left(x_r(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn + x_i(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn\right) \\ &\quad + i\sum_{n=0}^{N-1}\left(-x_r(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn + x_i(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn\right) \\ &\quad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_r(k)\cos\frac{2\pi}{N}kn - X_i(k)\sin\frac{2\pi}{N}kn\right) \\ &\quad + \frac{i}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_r(k)\sin\frac{2\pi}{N}kn + X_i(k)\cos\frac{2\pi}{N}kn\right) \\ &\quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \end{aligned} \tag{4.6}$$