

1 フーリエ変換とは

フーリエ変換とは、複素関数（または実関数）から別の複素関数への変換のことで、時間領域から周波数領域への変換である。また逆の変換をフーリエ逆変換という。

2 フーリエ変換の導出

複素フーリエ級数展開の定義からフーリエ変換を導出する。（以下、 i ：虚数単位）

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega_0 t) \quad \left(\text{ただし、}\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \exp(-in\omega_0 \tau) d\tau \right) \exp(in\omega_0 t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \exp(-i\frac{2n\pi}{T}\tau) d\tau \right) \exp(in\frac{2n\pi}{T}t) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_n = \frac{2n\pi}{T} = n\Delta\omega$ とおくと、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \exp(i\omega_n(t - \tau)) d\tau$$

$T \rightarrow \infty (\omega_0 \rightarrow 0)$ とすると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(i\omega(t - \tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right) \exp(i\omega t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right) \exp(i\omega t) d\omega \end{aligned}$$

ここで、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \tag{2.1}$$

とおくと、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \tag{2.2}$$

となる。(2.1) をフーリエ変換、(2.2) をフーリエ逆変換と呼ぶ。

次に、オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (2.3)$$

を使って (2.1), (2.2) を書き換えてみる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos \omega t - i \sin \omega t) dt \quad (2.4)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(\cos \omega t + i \sin \omega t) d\omega \quad (2.5)$$

となる。そして、関数 $f(t)$ が偶関数なら、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (2.6)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (2.7)$$

と表され、(2.6) をフーリエ余弦変換、(2.7) をフーリエ余弦逆変換と呼ぶ。また、関数 $f(t)$ が奇関数なら、

$$F(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (2.8)$$

$$f(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (2.9)$$

と表される。ここで、 $\frac{F(\omega)}{-i} = iF(\omega) \rightarrow F(\omega)$ と変数変換すると、虚数単位 $i, -i$ は除外することができ、

$$F(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (2.10)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (2.11)$$

となる。(2.10) をフーリエ正弦変換、(2.11) をフーリエ正弦逆変換と呼ぶ。

3 離散フーリエ変換とは

今まで連続の値について考えてきたが、当然コンピュータでは連続の値は扱えない。そのため、プログラムで実装するには、離散の概念を用いた 離散フーリエ変換、逆離散フーリエ変換 を使用する。

4 離散フーリエ変換の導出

1周期を N 分割したサンプル点 (複素数列) $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ に対して、得られる N 個のサンプル値 (複素数列) を $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$ とすると、

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-i \frac{2\pi}{N} kn) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (4.1)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(i \frac{2\pi}{N} kn) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (4.2)$$

が得られ、(4.1) を 離散フーリエ変換、(4.2) を 逆離散フーリエ変換 と呼ぶ。また、(4.1)、(4.2) にオイラーの公式 (2.3) を適用すると、

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) (\cos \frac{2\pi}{N} kn - i \sin \frac{2\pi}{N} kn) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (4.3)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) (\cos \frac{2\pi}{N} kn + i \sin \frac{2\pi}{N} kn) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (4.4)$$

となる。さらに、 $x(n), X(k)$ は複素数であるので、 $x(n)$ の実部・虚部を $x_r(n), x_i(n)$ 、 $X(k)$ の実部・虚部を $X_r(k), X_i(k)$ とすると、次のようになる。

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(x_r(n) \cos \frac{2\pi}{N} kn + x_i(n) \sin \frac{2\pi}{N} kn \right) \\ &\quad + i \sum_{n=0}^{N-1} \left(-x_r(n) \sin \frac{2\pi}{N} kn + x_i(n) \cos \frac{2\pi}{N} kn \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$(k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(X_r(k) \cos \frac{2\pi}{N} kn - X_i(k) \sin \frac{2\pi}{N} kn \right) \\ &\quad + \frac{i}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(X_r(k) \sin \frac{2\pi}{N} kn + X_i(k) \cos \frac{2\pi}{N} kn \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$