

概要

今までのフーリエ級数展開は実形式と呼ばれものであったが、三角関数を使用せず、複素数の指数関数を使用する形式を複素形式のフーリエ級数展開という。

1 複素フーリエ級数展開

まず、周期 T の周期関数 $f(t)$ の実形式のフーリエ級数展開は、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1.1)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.3)$$

$$\left(\text{ただし、} \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \dots \text{角周波数} \right)$$

であった。

次に、オイラーの公式を考える。(以下、 i は虚数単位)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$\theta = n\omega_0 t$ とおいて変形すると、

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2}, \quad \sin n\omega_0 t = -\frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2}i$$

となる。これらを (1.1) に代入すると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2} - b_n \frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2}i \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega_0 t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega_0 t} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (\text{ただし、} c_{-n} = c_n^* \text{ (複素共役)})$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega_0 t} + c_{-n} e^{-in\omega_0 t}) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega_0 t} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{-\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}
\end{aligned}$$

となる。

実際、フーリエ係数 c_0, c_n, c_{-n} は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt - \frac{i}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos n\omega_0 t - i \sin n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\
c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt + \frac{i}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos n\omega_0 t + i \sin n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{in\omega_0 t} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned}$$

以上をまとめると、複素フーリエ級数展開は、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (1.4)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (1.5)$$

$$\left(\text{ただし、} \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad i : \text{虚数単位} \right)$$

である。

2 例 2

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi < t \leq 0) \\ 1 & (0 < t \leq \pi) \end{cases}, f(t+2\pi) = f(t)$$

[手順]

複素フーリエ級数展開の定義より、

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \\ &\quad \left(\text{ただし、} \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad i : \text{虚数単位} \right) \end{aligned}$$

周期 $T = 2\pi$ より、

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot e^{-int} dt + \int_0^{\pi} e^{-int} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\frac{1}{in} e^{-int} \right]_{-\pi}^0 + \left[-\frac{1}{in} e^{-int} \right]_0^{\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\frac{1}{in} - \frac{1}{in} e^{in\pi} \right) + \left(-\frac{1}{in} e^{-in\pi} + \frac{1}{in} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2}{in} - \frac{1}{in} (e^{in\pi} + e^{-in\pi}) \right\} \\ &= \frac{1}{in\pi} (1 - \cos n\pi) \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} \end{aligned}$$

よって、

$$f(t) = \sum_{n=\pm 1}^{\pm \infty} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} e^{int} \quad (2.1)$$

3 実形式と複素形式のフーリエ級数展開の整合性確認

前述の例を実形式でフーリエ級数展開したものは、

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \quad (3.1)$$

であった。複素形式でフーリエ級数展開した (2.1) が、(3.1) と一致するか確認してみる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=\pm 1}^{\pm \infty} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} e^{int} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} e^{int} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^{-n}}{-in\pi} e^{-int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} e^{int} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{1}{(-1)^n}}{-in\pi} e^{-int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} e^{int} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{-in\pi} e^{-int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} e^{int} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} (e^{int} - e^{-int}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} \{(\cos nt + i \sin nt) - (\cos nt - i \sin nt)\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} \cdot 2i \sin nt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \cdot 2 \sin nt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\{(-1)^n - 1\}}{n\pi} \cdot \sin nt \\ &= \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t + \dots \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \end{aligned}$$

一致したので、実フーリエ級数展開と複素フーリエ級数展開は整合性がとれていることが確認できた。