概要

今までのフーリエ級数展開は実形式と呼ばれものであったが、三角関数を使用せず、複素数の指数関数を使用する形式を複素形式のフーリエ級数展開という。

1　複素フーリエ級数展開

まず、周期 T の周期関数 $f(t)$ の実形式の **フーリエ級数展開** は、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \tag{1.1}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t \ dt \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1.2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega_0 t \ dt \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1.3}$$

$$\left(\text{ただし、}\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \cdots \text{角周波数}\right)$$

であった。

次に、**オイラーの公式** を考える。(以下、i は虚数単位)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$\theta = n\omega_0 t$ とおいて変形すると、

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2}, \quad \sin n\omega_0 t = -\frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2} i$$

となる。これらを (1.1) に代入すると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2} - b_n \frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2} i\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega_0 t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega_0 t}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (\text{ただし、}c_{-n} = c_n^* \ \ (\text{複素共役}))$$

とおくと、

$$
\begin{aligned}
f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{in\omega_0 t} + c_{-n} e^{-in\omega_0 t} \right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega_0 t} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{-\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

となる。

実際、フーリエ係数 c_0, c_n, c_{-n} は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \ dt - \frac{i}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t \ dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos n\omega_0 t - i \sin n\omega_0 t) \ dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} \ dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\
c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \ dt + \frac{i}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t \ dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos n\omega_0 t + i \sin n\omega_0 t) \ dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{in\omega_0 t} \ dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}
$$

以上をまとめると、**複素フーリエ級数展開** は、

$$
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \tag{1.4}
$$

$$
c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} \ dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots) \tag{1.5}
$$

$$
\left(\text{ただし、} \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad i : \text{虚数単位} \right)
$$

である。

2 例2

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi < t \leq 0) \\ 1 & (0 < t \leq \pi) \end{cases}, f(t+2\pi) = f(t)$$

[手順]

複素フーリエ級数展開の定義より、

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega_0 t}\ dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots) \\ &\left(\text{ただし、}\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T},\quad i : \text{虚数単位}\right) \end{aligned}$$

周期 $T = 2\pi$ より、

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot e^{-int}dt + \int_{0}^{\pi} e^{-int}dt\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{in}e^{-int}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{1}{in}e^{-int}\right]_{0}^{\pi}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\left(\frac{1}{in} - \frac{1}{in}e^{in\pi}\right) + \left(-\frac{1}{in}e^{-in\pi} + \frac{1}{in}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2}{in} - \frac{1}{in}\left(e^{in\pi} + e^{-in\pi}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{in\pi}(1 - \cos n\pi) \\ &= \frac{1-(-1)^n}{in\pi} \end{aligned}$$

よって、

$$f(t) = \sum_{n=\pm 1}^{\pm\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} e^{int} \tag{2.1}$$

3　実形式と複素形式のフーリエ級数展開の整合性確認

前述の例を実形式でフーリエ級数展開したものは、

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \tag{3.1}$$

であった。複素形式でフーリエ級数展開した (2.1) が、(3.1) と一致するか確認してみる。

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=\pm 1}^{\pm\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} e^{int} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} e^{int} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^{-n}}{-in\pi} e^{-int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} e^{int} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\frac{1}{(-1)^n}}{-in\pi} e^{-int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} e^{int} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{-in\pi} e^{-int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} e^{int} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} \left(e^{int} - e^{-int}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} \left\{(\cos nt + i\sin nt) - (\cos nt - i\sin nt)\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{in\pi} \cdot 2i\sin nt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n-1}{n\pi} \cdot 2\sin nt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\{(-1)^n-1\}}{n\pi} \cdot \sin nt \\
&= \frac{4}{\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\sin 5t + \cdots \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}
\end{aligned}$$

一致したので、実フーリエ級数展開と複素フーリエ級数展開は整合性がとれいていることが確認できた。