Störmer の公式 (2)

Störmer の公式 (2) は、

$$\frac{\pi}{4} = 44\tan^{-1}\frac{1}{57} + 7\tan^{-1}\frac{1}{239} - 12\tan^{-1}\frac{1}{682} + 24\tan^{-1}\frac{1}{12943}$$

である。変形すると、

$$\pi = 176\tan^{-1}\frac{1}{57} + 28\tan^{-1}\frac{1}{239} - 48\tan^{-1}\frac{1}{682} + 96\tan^{-1}\frac{1}{12943}$$

さらに、テイラー展開（グレゴリー展開）すると、

$$\begin{aligned}
\pi &= 176\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{57}\right)^{2k+1} + 28\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1} \\
&\quad -48\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{682}\right)^{2k+1} + 96\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{12943}\right)^{2k+1} \\
&= \left(\frac{176}{57} - \frac{176}{3\cdot 57^3} + \frac{176}{5\cdot 57^5} - \frac{176}{7\cdot 57^7} + \cdots\right) \\
&\quad + \left(\frac{28}{239} - \frac{28}{3\cdot 239^3} + \frac{28}{5\cdot 239^5} - \frac{28}{7\cdot 239^7} + \cdots\right) \\
&\quad - \left(\frac{48}{682} - \frac{48}{3\cdot 682^3} + \frac{48}{5\cdot 682^5} - \frac{48}{7\cdot 682^7} + \cdots\right) \\
&\quad + \left(\frac{96}{12943} - \frac{96}{3\cdot 12943^3} + \frac{96}{5\cdot 12943^5} - \frac{96}{7\cdot 12943^7} + \cdots\right) \\
&= \left(\frac{176}{57} + \frac{28}{239} - \frac{48}{682} + \frac{96}{12943}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{176}{57^3} + \frac{28}{239^3} - \frac{48}{682^3} + \frac{96}{12943^3}\right) \\
&\quad + \frac{1}{5}\left(\frac{176}{57^5} + \frac{28}{239^5} - \frac{48}{682^5} + \frac{96}{12943^5}\right) - \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left(\frac{176}{57^{2k-1}} + \frac{28}{239^{2k-1}} - \frac{48}{682^{2k-1}} + \frac{96}{12943^{2k-1}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

となる。（後の計算の都合上 k の初期値を 0 ではなく 1 としている）

次に、l 桁の精度の π を求めるのに、変形後の Störmer(2) の公式の第何項まで計算（k の終端をいくらに）すればよいかという問題について。
$\frac{1}{57^{2k-1}} > \frac{1}{239^{2k-1}} > \frac{1}{682^{2k-1}} > \frac{1}{12943^{2k-1}}$ であるので、

$$\frac{1}{2k-1} \cdot \frac{1}{57^{2k-1}} < 10^{-l}$$

を満たす k が求まれば $k+1$ 項以降は計算しなくてもよい。まずは両方の常用対数を取る.
(以下 $\log = \log_{10}$)

$$\log\left(\frac{1}{2k-1} \cdot \frac{1}{57^{2k-1}}\right) < \log 10^{-l}$$
$$-\log(2k-1) + (2k-1)\log\left(\frac{1}{57}\right) < -l$$

ここで $O(\log k) < O(k)$ から $\log(2k-1)$ の項を無視して考えると、

$$\frac{l + \log 57}{2\log 57} < k$$

したがって、

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{\log 57} + 1\right)\right] + 1$$

で求まる桁まで計算すればよいことになる。($\left[\ \right]$ はガウス記号で、中の値を超えない最大の整数)