Eular の公式 (2)

Eular の公式 (2) は、

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99}$$

である。変形すると、

$$\pi = 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{70} + 4\tan^{-1}\frac{1}{99}$$

さらに、テイラー展開（グレゴリー級数）すると、

$$\begin{aligned}
\pi &= 16\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} - 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{70}\right)^{2k+1} + 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{99}\right)^{2k+1} \\
&= \left(\frac{16}{5} - \frac{16}{3\cdot 5^3} + \frac{16}{5\cdot 5^5} - \frac{16}{7\cdot 5^7} + \cdots\right) \\
&\quad - \left(\frac{4}{70} - \frac{4}{3\cdot 70^3} + \frac{4}{5\cdot 70^5} - \frac{4}{7\cdot 70^7} + \cdots\right) \\
&\quad + \left(\frac{4}{99} - \frac{4}{3\cdot 99^3} + \frac{4}{5\cdot 99^5} - \frac{4}{7\cdot 99^7} + \cdots\right) \\
&= \left(\frac{16}{5} - \frac{4}{70} + \frac{4}{99}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{16}{5^3} - \frac{4}{70^3} + \frac{4}{99^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{16}{5^5} - \frac{4}{70^5} + \frac{4}{99^5}\right) - \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left(\frac{16}{5^{2k-1}} - \frac{4}{70^{2k-1}} + \frac{4}{99^{2k-1}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

となる。（後の計算の都合上 k の初期値を 0 ではなく 1 としている）

次に、l 桁の精度の π を求めるのに、変形後の Eular の公式 (2) の第何項まで計算（k の終端をいくらに）すればよいかという問題について。

$\frac{1}{5^{2k-1}} > \frac{1}{70^{2k-1}} > \frac{1}{99^{2k-1}}$ であるので、

$$\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{1}{5^{2k-1}} < 10^{-l}$$

を満たす k が求まれば $k+1$ 項以降は計算しなくてもよい。まずは両辺の常用対数を取る．
(以下 $\log = \log_{10}$)

$$\log\left(\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{1}{5^{2k-1}}\right) < \log 10^{-l}$$

$$-\log(2k-1) + (2k-1)\log\left(\frac{1}{5}\right) < -l$$

ここで $O(\log k) < O(k)$ から $\log(2k-1)$ の項を無視して考えると、

$$\frac{l+\log 5}{2\log 5} < k$$

したがって、

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{\log 5} + 1\right)\right] + 1$$

で求まる桁まで計算すればよいことになる。([ ] はガウス記号で、中の値を超えない最大の整数)