連立方程式の解法　ガウス・ジョルダン法

　ガウス・ジョルダン (Gauss-Jorden) 法について、3 元連立方程式を例に説明する。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \tag{2}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \tag{3}$$

$(1) \div a_{11}$ で x_1 の係数を 1 に、$(2) - (1) \times a_{21}$、$(3) - (1) \times a_{31}$ とする。

$$x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1 \tag{1'}$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \tag{2'}$$
$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \tag{3'}$$

同様に、$(2') \div a'_{22}$ で x_2 の係数を 1 に、$(1') - (2') \times a'_{12}$、$(3') - (2') \times a'_{32}$ とする。

$$x_1 \qquad + a''_{13}x_3 = b''_1 \tag{1''}$$
$$x_2 + a''_{23}x_3 = b''_2 \tag{2''}$$
$$a''_{33}x_3 = b''_3 \tag{3''}$$

さらに、$(3'') \div a''_{33}$ で x_3 の係数を 1 に、$(1'') - (3'') \times a''_{13}$、$(2'') - (3'') \times a''_{23}$ とする。

$$x_1 = b'''_1$$
$$x_2 = b'''_2$$
$$x_3 = b'''_3$$

これで、$x_1 = b'''_1, x_2 = b'''_2, x_3 = b'''_3$ と解が求められた。

実際にプログラムするには、次のような係数行列を作り、これが単位行列になるように掃き出し演算を行えばよい。

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{array}\right)$$

アルゴリズムは以下のようになる。

ピボット（pivot:中心軸）を 1 行 1 列から n 行 n 列へ移しながら以下を繰り返す。

1. ピボットのある行の要素 $(a_{kk}, a_{kk+1}, \cdots, a_{kn}, b_k)$ をピボット係数 (a_{kk}) で除算する。結果としてピボットは 1 となる。なお、ピボット以前の要素 $(a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kk-1})$ はすでに 0 になっているので除算しなくてよい。
2. ピボット行以外の各行について以下を繰り返す。
   (a) (各行) − (ピボット行) × (係数)。
   この操作も、ピボット以前の列要素についてははすでに 0 になっているので行わなくてよい。