概要

フーリエ級数展開の基本概念は、19 世紀前半にフランスの数学者フーリエ（Fourier, 1764-1830）が熱伝導問題の解析の過程で考え出したものであり、「任意の周期関数は三角関数の和で表される」というものである。

1　フーリエ級数展開

周期 T の周期関数 $f(t)$ の **フーリエ級数展開** は、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \tag{1.1}$$

$$\left(\text{ただし、}\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \cdots \textbf{基本角周波数} \right) \tag{1.2}$$

と表される。$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$ は **フーリエ級数** と呼ばれ、

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \ dt \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \ \cdots \textbf{フーリエ余弦係数} \tag{1.3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t \ dt \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \ \cdots \textbf{フーリエ正弦係数} \tag{1.4}$$

である。当然、$T = 2\pi$ のとき $\omega_0 = 1$ となり、計算が簡素になる。

2　フーリエ余弦級数展開

$f(t)$ が周期 T の偶関数のとき、フーリエ級数展開は、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \ \left(\text{ただし、}\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right) \tag{2.1}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \ dt \tag{2.2}$$

と表され、**フーリエ余弦級数** と呼ばれる。

3　フーリエ正弦級数展開

$f(t)$ が周期 T の奇関数のとき、フーリエ級数展開は、

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \ \left(\text{ただし、}\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right) \tag{3.1}$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t \ dt \tag{3.2}$$

と表され、**フーリエ正弦級数** と呼ばれる。

さらに、与えられた関数がフーリエ級数の部分和で近似されるとき、項数をいくら増やしていっても、不連続点の近傍で誤差が生じる。これを **ギップス現象** という。

4　例1

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi < t \leq 0) \\ 1 & (0 < t \leq \pi) \end{cases} \quad , f(t+2\pi) = f(t)$$

[手順]

奇関数で周期が 2π なので、周期関数 $f(t)$ は、

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \tag{4.1}$$

である。

まず、フーリエ正弦級数 b_n を求める。

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt \ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\cdot\sin nt \ dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nt \ dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{n\pi}\{1-\cos(-n\pi)\} - \frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n\pi}\cos n\pi \\ &= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) \\ &= \frac{2}{n\pi}\{1-(-1)^n\} \\ &= \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & (n = 2m-1) \\ 0 & (n = 2m) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{すなわち、}\ b_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} \tag{4.2}$$

次に、(4.1) に (4.2) を代入してフーリエ級数展開する。

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)t \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \qquad (4.3) \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right) \end{aligned}$$

計算機では無限大 ∞ は扱えないので、$n = K$ で打ち切って近似することになる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{K}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \qquad (4.4) \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots + \frac{1}{2K-1}\sin(2K-1)t\right) \end{aligned}$$