テイラー展開

　無限回微分可能な関数 $f(x)$ について、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}
$$

を $f(x)$ の $x=a$ のまわりでのテイラー展開という。特に、$a=0$ とした

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n
\end{aligned}
$$

をマクローリン展開という。

e^x をテイラー展開すると次のようになる。

$$
e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^k}{k!} + \cdots
$$

これは無限級数になるので、実際の計算では実際の計算では有限回で打ち切る必要がある。打ち切る条件は、$k-1$ 項までの和を d、k 項までの和を s としたとき、

$$
\frac{|s-d|}{|d|} < EPS
$$

となったときである。$|s-d|$ を打ち切り誤差、$|s-d|/|d|$ を相対打ち切り誤差という。EPS の値は必要な精度に応じて設定する。8 桁程度の精度が必要なら $EPS = 1e-8$ とすればよい。

$\cos x$ をテイラー展開すると次のようになる。

$$
\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots
$$

テイラー展開は展開の中心に近いところでよい近似を与えるので、x の値は 0 〜2π の範囲に収まるように補正して計算する。

$\sin x$ をテイラー展開すると次のようになる。

$$
\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots
$$