# Klingenstierna の公式

Klingenstierna の公式は、

$$\frac{\pi}{4} = 8\tan^{-1}\frac{1}{10} - \tan^{-1}\frac{1}{239} - 4\tan^{-1}\frac{1}{515}$$

である。変形すると、

$$\pi = 32\tan^{-1}\frac{1}{10} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239} - 16\tan^{-1}\frac{1}{515}$$

さらに、テイラー展開（グレゴリー展開）すると、

$$\begin{aligned}
\pi &= 32\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{10}\right)^{2k+1} - 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1} - 16\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{515}\right)^{2k+1} \\
&= \left(\frac{32}{10} - \frac{32}{3\cdot 10^3} + \frac{32}{5\cdot 10^5} - \frac{32}{7\cdot 10^7} + \cdots\right) \\
&\quad - \left(\frac{4}{239} - \frac{4}{3\cdot 239^3} + \frac{4}{5\cdot 239^5} - \frac{4}{7\cdot 239^7} + \cdots\right) \\
&\quad - \left(\frac{16}{515} - \frac{16}{3\cdot 515^3} + \frac{16}{5\cdot 515^5} - \frac{16}{7\cdot 515^7} + \cdots\right) \\
&= \left(\frac{32}{10} - \frac{4}{239} - \frac{16}{515}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{32}{10^3} - \frac{4}{239^3} - \frac{16}{515^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{32}{10^5} - \frac{4}{239^5} - \frac{16}{515^5}\right) + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left(\frac{32}{10^{2k-1}} - \frac{4}{239^{2k-1}} - \frac{16}{515^{2k-1}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

となる。（後の計算の都合上 $k$ の初期値を 0 ではなく 1 としている）

次に、$l$ 桁の精度の $\pi$ を求めるのに、変形後の Klingenstierna の公式の第何項まで計算（$k$ の終端をいくらに）すればよいかという問題について。

$\frac{1}{10^{2k-1}} > \frac{1}{239^{2k-1}} > \frac{1}{515^{2k-1}}$ であるので、

$$\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{1}{10^{2k-1}} < 10^{-l}$$

を満たす $k$ が求まれば $k+1$ 項以降は計算しなくてもよい。まずは両方の常用対数を取る. (以下 $\log = \log_{10}$)

$$\log\left(\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{1}{10^{2k-1}}\right) < \log 10^{-l}$$

$$-\log(2k-1) + (2k-1)\log\left(\frac{1}{10}\right) < -l$$

ここで $O(\log k) < O(k)$ から $\log(2k-1)$ の項を無視して考えると、

$$\frac{l+\log 10}{2\log 10} < k$$

したがって、$\log 10 = 1$ であるので、

$$\left[\frac{l}{2}+1\right]+1$$

で求まる桁まで計算すればよいことになる。($\left[\ \right]$ はガウス記号で、中の値を超えない最大の整数)